

ENS DE LYON  
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

STAGE 2022 (M2)  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

Cutoff pour le modèle de marches  
aléatoires activées

---

*Étudiant :*  
Alexandre BRISTIEL

*Encadrant :*  
Justin SALEZ



26 août 2022

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Modèle sur des graphes finis . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Couplage IDLA/ARW</b>	<b>7</b>
2.1	Notation . . . . .	7
2.2	La diffusion interne limitée par agrégation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Deux résultats de concentration pour le temps de remplissage de l'IDLA</b>	<b>10</b>
3.1	Concentration avec remplissage rapide . . . . .	11
3.2	Concentration avec remplissage lent . . . . .	14
3.3	Analyse et comparaison des deux résultats . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Application au cutoff de l'ARW sur deux types de graphes</b>	<b>20</b>
4.1	Cas des grilles dans l'espace Euclidien . . . . .	21
4.2	Cas des graphes non-moyennables . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

# 1 Introduction

Le concept de **criticalité auto-organisée** est une description physique de système ayant un point critique absorbant. C'est à dire qu'un tel système sera naturellement attirée vers le point où ce produit une transition de phase. De petite fluctuations peuvent donner lieu a des formes macroscopique, dont le fameux "*effet boule de neige*". Ce modèle explique la présence de formes géométriques complexes voire fractale dans la nature qui semble ne pouvoir émerger que dans un système à son point critique. Bien que le concept soit bien accepté physiquement, il n'y a cependant pas de modèle universel bien compris mathématiquement.

Un des modèles présentés qui est un candidat pour être un modèle universel exhibant de la criticalité auto-organisée est le système de **marches aléatoires activées** (ARW). Ce modèle a été initialement introduit sur la grille  $\mathbb{Z}^d$ , c'est un système de particules où chaque particule peut être dans deux états, **active** ou **passive**. On autorise de plus plusieurs particules sur un même site. La dynamique locale du système est la suivante :

- Chaque particule **active** effectue une marche aleatoire en temps continue, par exemple la marche simple au plus proche voisin en temps continue sur  $\mathbb{Z}^d$ .
- De plus chaque particule **active** possède une horloge interne qui **désactive** la particule a taux  $0 < \lambda \leq \infty$  (qui peut être infini).
- Une particule **passive** sera **réactivé** si une particule **active** arrive sur le site où cette dernière était fixée. Si une particule devait se **désactiver** sur un site où elle n'était pas seule alors elle est instantanément **réactivé**.

Une des propriétés les plus surprenante de ce système est la **propriété abélienne**, on peut effectuer le déplacement de chaque particule dans n'importe quel ordre sans changer la distribution finale du système.

L'un des intérêts du modèle consiste en l'étude de la transition de phase, s'il y a trop peu de particules initiale alors toutes les particules finiront par devenir passive, alors qu'au contraire si on commence avec assez de masse initiale les effets en cascade réactivent les particules passives ce qui fait que le système ne se stabilise jamais.

## Définition 1.1

On dit que le système se stabilise si, pour chaque site fixée, le nombre de particule active à ce site est stationnaire à partir d'un certain temps.

Étant donné une distribution initiale de particules active à densité  $\mu$ , par exemple un nombre de particule qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu$ , et un taux de désactivation  $\lambda$ , par un argument ergodique, la probabilité que le système se stabilise est 0 ou 1. De plus on peut se convaincre que si un système paramétré par  $\mu$  et  $\lambda$  se stabilise alors tout système à densité plus petite que  $\mu$  et taux de désactivation plus grand que  $\lambda$  se stabilisera aussi. En effet on peut coupler deux systèmes paramétrés par  $(\mu, \lambda)$  et  $(\mu', \lambda')$  tels que  $\mu' \leq \mu$  et  $\lambda' \geq \lambda$  de tel manière à ce que le premier système aura toujours plus de particule actives que le second. En conclusion il existe une **surface critique**  $(\mu, \lambda)$  qui sépare la stabilisation de l'activité.

L'étude de cette courbe n'est pas du tout achevée et a connu des avancées très récentes. Il est conjecturé que la densité critique est une fonction strictement décroissante de  $\lambda$ . Il

n'a été prouvé que quelque jour avant le début de mon stage qu'il y a une transition non-triviale en dimension 2 c'est à dire qu'il est possible d'avoir une phase active en dimension 2. On sait donc maintenant qu'il y a non-fixation en toute dimension pour  $\lambda$  assez proche de 0, et il y a fixation pour  $\mu$  assez proche de 1.

**Criticalité auto-organisée** La transition de phase pour le système macroscopique  $\mathbb{Z}^d$  est une transition ordinaire, l'aspect de système "auto-organisé" lui se comprend lorsqu'on regarde des boîtes finies. Dans un cadran fini s'il y a trop de particules actives le surplus aura tendance à aller vers l'infini, alors que s'il y en a trop peu, les particules actives qui arrivent dans le système ont tendance à s'accumuler. Cela mène à la conjecture que le système est attiré vers une densité critique qui serait la même que la densité critique qui fait interface entre non-stabilisation et fixation. Récemment Levine et Liang ont précisé un cadre dans [LL21] pour étudier la dynamique finie et tenter de comprendre la limite d'échelle. Dans mon stage je me suis intéressé à la dynamique qu'ils ont défini sur des graphes finis pour notamment regarder le temps de mélange du système. En effet un mélange rapide est souvent signe d'universalité du modèle.

## 1.1 Modèle sur des graphes finis

On se place maintenant dans un cadre plus général et on prend  $G = (V, E)$  un graphe fini. On suppose de plus le graphe  $G$  est connecté à un ensemble de "puits"  $V^*$  qui sont des états absorbants. On supposera toujours que tout site dans  $V$  est connecté à au moins un puits. On peut par exemple imaginer  $G$  comme étant une boîte finie  $[0, L]^d$  de  $\mathbb{Z}^d$  et une particule est absorbée si elle quitte  $G$ .

Dans la suite on dénotera  $\mathbf{s}$  ("sleep") "une particule passive" et  $n \in \mathbb{N}$  " $n$  particule active" sur un site, on dénote aussi  $\mathbb{N}_{\mathbf{s}} = \mathbb{N} \cup \{\mathbf{s}\}$ . Une **configuration**  $\sigma$  est un élément de  $\mathbb{N}_{\mathbf{s}}^V$ . La dynamique sur les configurations est alors similaire au cas infini sans qu'on ait l'absorption de particules si elles tombent dans les puits.

### Définition 1.2

Si  $z \in V$  est un sommet, le *renversement* en  $x$  est l'opérateur qui à une configuration  $\sigma$  associe la configuration suivante

- Si  $\sigma_x = 1$ , c'est à dire s'il y a une particule seule sur le site  $x$ , alors avec probabilité  $q = \frac{\lambda}{1+\lambda}$  la particule dans le site  $x$  devient passive. Sinon la particule est déplacée aléatoirement vers un site voisin, et elle est absorbée si elle arrive dans un puits.
- Si  $\sigma_x \geq 2$  la particule est toujours déplacée aléatoirement dans un des sites voisins, et elle est aussi absorbée si elle arrive dans un puits.
- Dans tout autre cas rien ne change.

La **stabilisation** d'une configuration  $\sigma$  consiste à effectuer des *renversements* successifs jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de renversement non-triviaux possibles, c'est à dire jusqu'à ce que tous les sites de  $\sigma$  aient soit une particule passive soit aucune. Si une configuration  $\sigma$  est à valeur dans  $\{0, \mathbf{s}\}$  on dit qu'elle est **stable**. La version finie de l'ARW hérite de la **propriété abélienne** de la version infinie, une conséquence de cela est la suivante.

**Corollaire : Première propriété abélienne finie**

La loi de la **stabilisation** d'une configuration ne dépend pas de l'ordre dans laquelle on effectue les *renversements*.

On note  $S[\sigma]$  la *stabilisation* de la configuration  $\sigma$ . On peut maintenant définir la chaîne de Markov qu'on va étudier par la suite. Cette chaîne simule ce qui se passe dans une boîte fini pour l'ARW. On ajoute une à une de nouvelles particules en attendant à chaque fois la fin de la stabilisation du système.

**Définition 1.3**

Le processus d'ARW  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov sur l'ensemble des *configuration stables*, paramétré par un taux de désactivation  $\lambda$ , tel que la loi de  $X_{t+1}$  sachant  $X_t$  est donnée par la stabilisation de  $X_t$  auquel on ajoute une particule uniformément sur le graph  $G$ . Autrement dit si  $(U_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une suite i.i.d. de variable uniforme sur  $G$  alors

$$X_{t+1} := S[X_t + \delta_{U_t}],$$

ou  $\delta_x$  pour  $x \in V$  est la configuration avec uniquement une particule active en  $x$ .

Cette définition correspond bien à une chaîne de Markov sur un ensemble fini d'états, voir [LL21] pour plus de détails techniques. Une autre conséquence utile de la propriété abélienne est une **propriété de Markov** pour le processus d'ARW.

**Corollaire : Deuxième propriété abélienne finie**

Stabiliser  $n$  particules d'un seul coup ou les stabiliser une par une ne change pas la distribution finale. En d'autres termes si  $(U_t)_{t=1, \dots, n}$  sont  $n$  variables i.i.d, uniformes sur  $G$  alors

$$S\left[\sum_{t=1}^n \delta_{U_t}\right] \sim S[S[\dots S[\delta_{U_1}] + \delta_{U_2} \dots] + \delta_{U_{n-1}}] + \delta_{U_n}.$$

Une application intéressante de cette propriété est la détermination de la mesure invariante du processus d'ARW.

**Lemme 1.1 : Mesure invariante de l'ARW**

La **mesure invariante**  $\pi$  du processus d'ARW  $X_t$  est la stabilisation de la configuration pleine. En d'autre terme pour tout configuration stable  $\sigma \in \{0, \mathbf{s}\}^V$  on a

$$\pi(\sigma) = \mathbb{P}(S[\mathbf{1}_V] = \sigma).$$

Malgré le fait qu'on puisse décrire ainsi la mesure invariante très peu est connu sur celle-ci. Le calcul explicite de la loi ne peut être fait, même dans la plus part des cas simples.

Cependant comprendre cette loi peut être la clef pour prouver de la criticalité auto-organisée. En effet comme nous avons mentionné en introduction on s'attend à un effet d'auto-contrôle qui fait que la masse présente dans une boîte fini aura tendance à converger vers une même densité critique. Plus précisément si  $(V_r)_{r \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^d$  sont des boîtes finis assez régulière tel que  $\bigcup_{r \geq 0} V_r = \mathbb{Z}^d$  on s'attend à ce que,

$$\frac{|S[\mathbf{1}_{V_r}]|}{|V_r|} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \zeta(\mathbb{Z}^d, \lambda), \quad \text{en probabilité,}$$

où  $|\cdot|$  dénote le nombre de particule dans une configuration et  $\zeta(\mathbb{Z}^d, \lambda)$  est la densité critique de stabilisation de l'ARW sur la grille  $\mathbb{Z}^d$ .

*Démonstration.* Le processus d'ARW  $(X_t)$  est une chaîne de Markov finie et irréductible, il admet donc une unique mesure invariante  $\pi$ . Or, par la propriété de Markov, si  $U$  est uniforme sur  $G$  alors

$$S[S[\mathbf{1}_V] + \delta_U] \sim S[S[\mathbf{1}_V + \delta_U]].$$

De plus, pour stabiliser  $\mathbf{1}_V + \delta_U$  on peut commencer par bouger la particule qu'il y a en trop sur le site  $U$ . Si on suit le mouvement de cette particule elle finira inévitablement par être absorbée puisqu'il n'y a aucun site libre. On en déduit que  $S[S[\mathbf{1}_V + \delta_U]] \sim S[\mathbf{1}_V]$ . Nous avons démontré que

$$S[S[\mathbf{1}_V] + \delta_U] \sim S[\mathbf{1}_V],$$

ce qui veut exactement dire que  $S[\mathbf{1}_V]$  est invariant par l'action de la chaîne  $(X_t)$ .  $\square$

**Exemple déterministe** Un des seuls exemples où l'on peut calculer la mesure invariante et sur la marche aléatoire dirigée sur  $\mathbb{Z}^d$ . Pour fixer les idées supposons que  $d = 1$  et  $G = [0, L]$ . La marche aléatoire sur  $G$  est dirigée, par exemple vers la droite. On commence par placer une particule active sur chaque site de  $G$ . Pour stabiliser  $\mathbf{1}_{[0, L]}$  on peut commencer par la gauche, la particule en position 0. Avec probabilité  $\lambda/(1 + \lambda)$  elle est désactivée et n'a aucun moyen d'être réactivée, sinon elle ira à droite et sera immédiatement dirigée jusqu'au puits où elle sera absorbée. On peut continuer ensuite avec la particule dans le site 1 et ainsi de suite. Chaque site a une probabilité  $\lambda/(1 + \lambda)$  que la particule reste, indépendamment du reste des sites. En d'autre terme  $\pi$  la mesure invariante de l'ARW dirigée sur  $[0, L]$  est un produit de Bernouilli indépendantes de paramètre  $\zeta_c = \lambda/(1 + \lambda)$ . Par la loi faible des grands nombres on confirme que

$$\frac{|S[\mathbf{1}_{[0, L]}]|}{L} \rightarrow \zeta_c, \quad \text{en probabilité,}$$

de plus  $\zeta_c$  est bien la densité critique de l'ARW dirigée sur  $\mathbb{Z}$  (voir [CRS14, Théorème 1]).

Un des objectif de l'étude de cette version finie de l'ARW est de prouver une forme de *mélange rapide* pour la chaîne  $(X_t)$ , ce qui pointerait vers l'*universalité* du modèle, qui ne dépend pas des conditions initiales. En particulier est conjecturée dans [LL21] pour l'ARW sur les boules de rayon  $r$   $B_r$  de  $\mathbb{Z}^d$ , un **cutoff** en variation totale au temps  $t_{\text{mix}} = \zeta_c |B_r|$  où  $\zeta_c$  est la densité critique de l'ARW sur  $\mathbb{Z}^d$ . Si c'était le cas alors en particulier il suffirait de mettre  $\zeta_c |B_r|$  particules initiale pour atteindre l'équilibre, pour cela il faudrait que très peu de particules s'échappent du système, puisque la mesure invariante est aussi conjecturée avoir une densité  $\zeta_c$ .

**Objectifs et plan du rapport** Dans mon stage on a exploitée une connexion forte entre le processus de l'ARW et le processus mieux compris de l'IDLA (*internal diffusion limited aggregation*) qui se trouve être l'ARW avec taux de désactivation infini. Nous avons établi un cadre général pour pouvoir prouver une première version de cutoff dans plusieurs graph, non pas en *variation totale* mais en *séparation*. Nous avons essayer d'explicitier la preuve du résultat dans le cas de  $\mathbb{Z}^d$  qui était démontrée dans [LL21]. en essayant d'en tirer des extensions plus générales. Nous avons aussi développé une autre approche pour traiter le cas d'autres type de graphs, des graphs avec une bonne expansion qui fait que les particules ont tendance à se diriger aller vers l'infini très vite, contrairement au cas des grilles. Dans ce rapport je vais commencer par présenter la connexion fondamentale qu'on utilisera tout le long, qui relie cutoff pour l'ARW et temps de remplissage de l'IDLA puis je prouverai deux inégalité de concentration pour l'IDLA. Enfin j'utiliserai ces inégalités pour prouver cutoff en séparation pour l'ARW dans deux contextes bien différents, les réseaux de  $\mathbb{R}^d$  et les graphes non-moyennables.

## 2 Couplage IDLA/ARW

### 2.1 Notation

Dans la suite on notera  $G = (V, E)$  un graph simple, transitif et fini avec un ensemble de puits absorbant noté  $V^*$ . On notera habituellement  $(X_t)$  la marche aleatoire simple au plus proche voisin sur  $G$ .  $\mathbb{P}_x$  et  $\mathbb{E}_x$  pour  $x \in V$  dénotent la loi et l'espérance de la marche  $(X_t)$  initialisée en  $x$ . On utilisera aussi toujours les abréviations pour le processus de marches aléatoires activées (**ARW**) et la diffusion interne limitée par agrégation (**IDLA**).

### 2.2 La diffusion interne limitée par agrégation

L'ARW avec taux de désactivation  $\lambda = \infty$  porte aussi le nom de diffusion interne limitée par agrégation (IDLA). C'est un processus qui avait déjà été étudié, par exemple par Lawler, Bramson et Griffeath dans [LBG92], dont nous parlerons un peu plus longuement plus tard. Ce processus a une description simple, on lance une à une des particules qui se fixent au premier site libre et n'y bougent plus. Une quantité fondamentale pour l'IDLA est  $T_{\text{full}}$ , le **temps de remplissage**, c'est à dire le premier instant où l'IDLA a rempli le graph en entier. Après  $T_{\text{full}}$  le processus reste stationnaire à la configuration pleine. Cette quantité est essentielle pour le couplage IDLA/ARW et permet de relier les résultats que nous présenterons plus tard sur IDLA, au *cutoff* pour l'ARW.

Nous commençons maintenant par expliciter ce qu'on entend par cutoff en séparation. Tout d'abord,

#### Définition 2.1

Deux mesure  $\mu, \nu$  sur un ensemble fini  $\mathcal{X}$  ont une *distance en séparation* défini par

$$s(\mu, \nu) = \max_{x \in \mathcal{X}} 1 - \frac{\nu(x)}{\mu(x)}.$$

Si  $(X_t)$  est une chaine de Markov sur un ensemble fini d'états  $\mathcal{X}$ , avec mesure invariante  $\pi$  on dénote la *distance en séparation* de  $X_t$  et  $\pi$  par

$$s(t) = \max_{x \in \mathcal{X}} 1 - \frac{\mathbb{P}_x(X_t = y)}{\pi(y)}.$$

Le **temps de mélange** lui mesure le nombre d'étapes qu'il faut à une chaine pour s'approcher de l'équilibre, ici on mesure la distance à l'équilibre avec la *distance en séparation*.

#### Définition 2.2

Soient  $(X_t)$  est une chaine de Markov avec mesure invariante  $\pi$  et  $\varepsilon > 0$ . Le **temps de mélange** à précision  $\varepsilon$ ,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$ , est défini par

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \inf\{t \geq 0 \mid s(t) \leq \varepsilon\}.$$

Le **cutoff** est un phénomène de mélange très brutal, le système passe très rapidement d'un état non-mélangé à être complètement mélangé. Plus formellement on dit qu'une suite de chaîne de Markov  $(X_t^n)$  avec temps de mélange  $t_{\text{mix}}^n$  exhibe un **cutoff en séparation** s'il existe une fonction  $f(n)$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé

$$\frac{t_{\text{mix}}^n(\varepsilon)}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Autrement dit les temps entre les temps paliers de mélange,  $t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon)$  et  $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$  sont négligeable devant le second temps,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$ .  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) - t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon)$  est souvent appelle la *fenêtre de cutoff*.

Lorsque l'on parle de mélange la *variation totale* est la quantité qui le plus souvent nous intéresse mais ces deux valeurs sont comparables. La mesure du mélange en *variation totale* est plus fine. On par exemple dans notre cas, pour l'ARW, que si  $x$  est la configuration vide et  $y$  la configuration pleine alors pour tout  $t < |V|$  on a  $\mathbb{P}_x(X_t = y) = 0$ , ce qui veut dire pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  on a  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq |V|$  et on verra que pour des boules quelque soit la dimension on  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = |V| + o(|V|)$ . Contrairement au temps de mélange au sens de la distance en variation totale qu'on conjecture être équivalent à  $\zeta_c |V|$  qui dont dépend de la dimension et du taux de désactivation. On peut toutefois relier la *distance en séparation* à la *variation totale*

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mu(x) - \nu(x)| = \sum_{\mu(x) > \nu(x)} \mu(x) - \nu(x).$$

En effet on a

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sum_{\mu(x) > \nu(x)} \mu(x) - \nu(x) \leq s(\mu, \nu) \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) = s(\mu, \nu).$$

Une propriété intéressante qu'on gagne par contre avec la distance en séparation est sa connexion avec les *temps stationnaire forts*. Un temps stationnaire est un temps d'arrêt après lequel la chaîne est totalement mélangée, et si la distribution de la chaîne après ce temps ne dépend pas du temps alors c'est un temps stationnaire fort.

### Définition 2.3

Un *temps stationnaire fort* pour une chaîne de Markov  $(X_t)$  sur un ensemble fini d'états  $\mathcal{X}$ , est un temps d'arrêt  $\tau$  tel que  $X_\tau$  soit distribué selon  $\pi$ , la mesure invariante de  $(X_t)$ , et indépendant de  $\tau$ . Plus formellement on a

$$\forall y \in \mathcal{X}, \mathbb{P}(X_t = y | \tau \leq t) = \pi(y).$$

On peut observer que pour un *temps stationnaire fort*  $\tau$  on a  $\mathbb{P}_x(X_t = y) / \pi(y) \leq \mathbb{P}(X_t = y, \tau \leq t) / \pi(y) = \mathbb{P}(\tau < t)$  et donc en reprenant la définition de distance en séparation

$$s(t) = \max_{x \in \mathcal{X}} 1 - \frac{\mathbb{P}_x(X_t = y)}{\pi(y)} \leq \max_{x \in \mathcal{X}} 1 - \mathbb{P}_x(\tau \leq t) = \max_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_x(\tau > t). \quad (1)$$

On va maintenant introduire la propriété qui nous a motivé à étudier le couplage de l'IDLA et l'ARW et la connexion avec le mélange en séparation. On commence par noter

que tout mouvement de l'IDLA est admissible dans l'ARW. Par la propriété abélienne si on part d'une configuration  $\sigma$  on peut commencer par faire l'IDLA sur  $\sigma$  (sans endormir les particules isolées) puis lorsque l'IDLA s'est fini, continuer avec l'ARW. Cela définit un couplage entre l'IDLA et l'ARW et le temps de remplissage de l'IDLA  $T_{\text{full}}$  est alors un temps d'arrêt pour l'ARW. En réalité on a la propriété plus forte [LL21], le temps de remplissage est un **temps stationnaire fort**.

**Lemme 2.1 : Théorème 2. de [LL21]**

Soit  $T_{\text{full}}$ , le premier temps que l'IDLA atteigne la configuration pleine. Alors  $T_{\text{full}}$  est un temps stationnaire fort pour l'ARW.

*Démonstration.* On note  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  l'IDLA et l'ARW respectivement, tel que l'ARW est la stabilisation de l'IDLA, c'est à dire  $Y_t := S[X_t]$ . Alors par définition du temps de remplissage,  $X_{T_{\text{full}}} = \mathbf{1}_V$  et  $X_{T_{\text{full}}}$  est donc indépendante de  $T_{\text{full}}$ . De plus par Lemme 1.1  $Y_{T_{\text{full}}} = S[\mathbf{1}_V]$  est distribuée selon la mesure invariante de l'ARW, ce qui conclut la preuve.  $\square$

On peut donc appliquer (1) au temps de remplissage  $T_{\text{full}}$ , d'autant plus que le temps de remplissage est clairement maximisé pour la configuration initiale vide. Ce qui nous donne finalement

$$s(t) \leq \mathbb{P}_{0_V}(T_{\text{full}} > t).$$

Dans la suite sauf précisions, on ne considèrera que l'IDLA initialisée à la configuration vide. Le dernier point qui achèvera la connexion entre temps de remplissage et mélange en séparation est le fait qu'on a en fait égalité dans l'inégalité précédente.

**Proposition 2.1**

Soit  $G_n = (V_n, E_n)$  une suite de graph finis. L'ARW sur  $G_n$  exhibe un cutoff en séparation si le temps de remplissage  $T_{\text{full}}$  de l'IDLA est concentré autour de sa moyenne, c'est à dire si

$$\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ en probabilité.}$$

Dans ce cas, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé on a

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \mathbb{E}[T_{\text{full}}] + o_\varepsilon(\mathbb{E}[T_{\text{full}}]).$$

Comme nous avons commenté précédemment on voit la que le cutoff en séparation est moins précis que celui en variation totale. Il ne dépend pas du taux de désactivation  $\lambda$ . Cependant il permettra je l'espère de comprendre la structure complexe du système d'ARW, d'autant plus que la quantité  $T_{\text{full}}$  a un intérêt en soi.

En résumé dans cette partie nous avons démontré que pour étudier le cutoff en séparation on peut se ramener au cas  $\lambda = \infty$ , l'IDLA.

*Démonstration.* On note  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  l'IDLA et l'ARW respectivement, tel que l'ARW est stabilisation de l'IDLA, c'est à dire  $Y_t := S[X_t]$ . Si  $x = 0_V$  est la configuration

vide et  $y = \mathbf{1}_V$  est la configuration pleine alors  $\mathbb{P}(X_t = y, T_{\text{full}} > t) = 0$ . En effet  $X_t$  est la stabilisation d'une configuration  $Y_t$  qui ne contient pas  $|V|$  particule initiale puisque  $T_{\text{full}} > t$ , or le nombre de particule ne peut croître après stabilisation, d'où  $\mathbb{P}(X_t = \mathbf{1}_V, T_{\text{full}} > t) = 0$ . On en déduit alors que  $\mathbb{P}(X_t = \mathbf{1}_V, T_{\text{full}} \leq t) = \mathbb{P}(X_t = \mathbf{1}_V)$ , on a donc un cas d'égalité dans (1), ce qui fait que

$$s(t) = \mathbb{P}(T_{\text{full}} > t).$$

En particulier  $t_{\text{mix}}$  est la *fonction quantile* de  $T_{\text{full}}$ .

Supposons qu'on ai concentration de  $T_{\text{full}}$ . Soit  $\varepsilon, \delta > 0$  et  $n$  assez grand pour que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \delta\right) < \varepsilon.$$

En particulier on a

$$\begin{cases} t_{\text{mix}}(\varepsilon) & \leq (1 + \delta)\mathbb{E}[T_{\text{full}}] \\ t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon) & \geq (1 - \delta)\mathbb{E}[T_{\text{full}}]. \end{cases}$$

Puisque  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon)$  on en conclue que

$$\left|\frac{t_{\text{mix}}(\varepsilon)}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \leq \delta.$$

Ce résultat vaut pour tout  $\varepsilon, \delta$  lorsque  $n$  est assez grand, donc pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé on a

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \mathbb{E}[T_{\text{full}}] + o_\varepsilon(\mathbb{E}[T_{\text{full}}]),$$

c'est à dire qu'on a cutoff à  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}]$ . □

*Remarque.* Puisque  $t_{\text{mix}}$  est la fonction quantile de  $T_{\text{full}}$  on a aussi la formule

$$\mathbb{E}[T_{\text{full}}] = \int_0^1 t_{\text{mix}}(\varepsilon) d\varepsilon$$

### 3 Deux résultats de concentration pour le temps de remplissage de l'IDLA

Dans cet section on montre deux résultat généraux de *concentration* pour  $T_{\text{full}}$  le **temps de remplissage** de l'IDLA. Comme décrit précédemment ces résultats se traduisent directement en cutoff pour le mélange de l'ARW. Ces résultat utilisent des comparaisons pour pouvoir décorrélérer les différentes particules et se débarrasser de la difficulté qu'est l'étude de la fixation des particules.

Dans le premier cas lorsque le graph est bien connecté les particules passent en moyenne assez de temps dans le graph avant d'être absorbées pour visiter rapidement tous les sites. Dans le second cas, si le temps d'absorption est très court alors le processus se comporte de manière similaire au problème du *collectionneur de vignettes*, un site est visité seulement si la particule est initialisée dans un voisinage fini autour du site. Comme le *collectionneur de vignette* on aura aussi concentration pour  $T_{\text{full}}$ , de plus on aura un contrôle de l'ordre de grandeur de  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}]$ .

Avant de commencer on introduit une quantité qui sera essentielle dans la suite.

### Définition 3.1

Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov avec puits à  $V^*$ . Si  $\tau_A = \inf\{t \geq 0, X_t \in A\}$  dénote le temps d'atteindre  $A$ , alors la **probabilité moyenne d'atteindre** le sommet  $z \in V$  est

$$p(z) := \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_{V^*}), \quad (2)$$

La probabilité moyenne d'atteindre  $p(z)$  mesure à quel point  $z$  est accessible. De plus, à chaque étape  $p(z)$  majore la probabilité de remplir  $z$ , étant une bonne estimée pour les dernières étapes. On peut déjà remarquer que  $p(z) \geq 1/|V|$  puisque  $\mathbb{P}(\tau_z < \tau_{V^*}) = 1$ . Cette probabilité d'atteinte va nous servir pour caractériser la vitesse de remplissage qui pourra aller du plus lent,  $T_{\text{full}} \sim |V| \log |V|$  (le cas  $p(z) = 1/|V|$ ), au plus rapide  $T_{\text{full}} \sim |V|$  (nous verrons que ça correspond à  $p(z) \gg \log |V|/|V|$ ). Nous donnerons une condition général sur les  $p(z)$  pour avoir concentration du temps de remplissage (et donc cutoff en séparation) sans déterminer l'ordre de grandeur de  $T_{\text{full}}$ .

### 3.1 Concentration avec remplissage rapide

Dans la suite on se fixe un graph fini et simple  $G = (V, E)$  avec des puits  $V^*$ . Pour  $z$  un sommet,  $p(z)$  probabilité moyenne d'atteinte définie en (2).

Le premier cas où l'on prouve concentration est le cas des graphs bien connectés, c'est à dire que chaque sommet peut être visité rapidement pour la marche aléatoire initialisée uniformément. Plus concrètement cela se traduit par une condition sur les  $p(z)$ , en particulier on dira qu'une suite de graph est *uniformément bien connecté* si on a  $\inf_{z \in V} p(z) \gg \log |V|/|V|$ . Notre résultat confirme l'intuition qu'une bonne connectivité résulte en peu de particules perdues et un fixage rapide des particules. Au moment du remplissage complet, un nombre négligeable de particule ont été absorbées, ce qui fait qu'il a fallu uniquement  $|V| + o(|V|)$  particule pour remplir le graph.

**Un premier exemple** Ce seuil à  $\log |V|/|V|$  peut se comprendre en comparant à un modèle plus simple qui consiste à envoyer une à une des **marches indépendantes** jusqu'à ce qu'elle soit absorbées et à regarder le temps qu'il faut pour que chaque sommet soit visité au moins une fois. Fixons un sommet  $z$  et une déviation  $\varepsilon > 0$ . À chaque fois qu'une nouvelle marche est lancée la probabilité que  $z$  soit visité est exactement  $p(z)$ , et la probabilité que  $z$  ne soit pas vu après que  $|V| + \varepsilon|V|$  particules soient lancées est exactement  $(1 - p(z))^{|V| + \varepsilon|V|}$ . On peut alors majorer la probabilité qu'il reste un sommet non visité après le temps  $|V| + \varepsilon|V|$  par  $|V|(1 - \inf_{z \in V} p(z))^{|V| + \varepsilon|V|}$ . Si on a  $\inf_{z \in V} p(z) \gg \log |V|/|V|$  alors la quantité précédente est négligeable devant  $|V|^{-\varepsilon}$ . En particulier pour tout  $\varepsilon > 0$ , asymptotiquement lorsque  $|V| \rightarrow \infty$ , chaque sommet est visité presque sûrement avant  $|V| + \varepsilon|V|$ . Pour l'IDLA on perd l'indépendance des marches et chaque particule est autorisée à visiter qu'un seul nouveau site ce qui ralentit le processus. Cependant, comme on verra plus loin, il est possible toutefois de coupler ces deux processus de manière à les comparer.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de concentration dans le cas de graphes *uniformément bien connectés*.

### Théorème 3.1

Soit  $G = (V, E)$  un graph fini et  $T_{\text{full}}$  le **temps de remplissage** du processus d'IDLA. Pour  $z \in V$   $p(z)$  est défini comme dans (2). Pour chaque  $\varepsilon \in (0, 1)$  on a

$$\mathbb{P}(T_{\text{full}} \geq |V| + \varepsilon|V|) \leq 2|V| \exp\left(-\frac{|V|\varepsilon^2}{24} \inf_{z \in V} p(z)\right).$$

En particulier si une suite de graphes vérifie  $\inf_{z \in V} p(z) \gg \log |V|/|V|$  alors presque sûrement  $T_{\text{full}} = |V| + o(|V|)$ .

Une application directe de ce résultat est la conjecture 9 de [LL21]. En effet si  $G$  est un graph transitif avec un sommet design comme puits, alors Aldous prouve dans [Ald89, Proposition 3] que pour tout sommet  $z \in V$ ,  $p(z) = 1/2$ . Par le Théorème 3.1 on a que presque sûrement  $T_{\text{full}} = |V| + \mathcal{O}(\sqrt{|V| \log |V|})$ , en particulier  $T_{\text{full}}/|V| \rightarrow 1$  en probabilité.

La structure de la preuve est identique aux premiers résultats de Lawler, Bramson et Griffeath dans [LBG92] sur le modèle Diaconis et Fulton. Dans ce modèle, les auteurs regardent le même processus d'IDLA mais sur le graph  $\mathbb{Z}^d$  avec une seule source, c'est à dire chaque marche est initialisée à l'origine. Il prouve que asymptotiquement le processus se comporte comme une boule euclidienne. Si  $B_r$  est l'intersection de la boule euclidienne de rayon  $r$  avec la grille  $\mathbb{Z}^d$  et que l'on lance  $|B_r| + o(|B_r|)$  particules à l'origine, après stabilisation presque sûrement  $B_r$  sera remplie. Seul  $o(|B_r|)$  se seront échappé de la boule  $B_r$ . Plus récemment dans [LL21] est prouvé un résultat similaire dans le cas de la restriction de l'IDLA au graph fini  $B_r$  avec des puits aux bords. Cette dernière preuve utilise aussi la même structure que nous allons présenter.

*Démonstration.* Nous commençons par un rappel d'une inégalité de concentration bien connue, **l'inégalité de Bernstein**. Si  $(X_i)_{i \in [1, n]}$  sont des variables aléatoires indépendantes tels que pour tout  $i \in [1, n]$  on ait  $|X_i| \leq 1$  presque sûrement, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X_i] \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i + 2t/3}\right).$$

En particulier si  $S$  est une somme de variables de Bernoulli et  $\mu = \mathbb{E}[S]$ , alors pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$  on la simplification

$$\mathbb{P}(S - \mu \geq \varepsilon\mu) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\mu}{3}\right). \tag{3}$$

Cette dernière forme nous sera utile dans la suite.

Considérons maintenant le processus d'IDLA au temps  $t = |V| + \varepsilon|V|$ , ce qui revient par le propriété abélienne à considérer  $t$  particules uniformément initialisées. Comme dans le premier exemple des **marches indépendantes** fixons un sommet  $z \in V$  et étudions la

probabilité que  $z$  ne soit pas encore rempli au temps  $t$ . Dans l'IDLA la trajectoire d'une particule après qu'elle se soit fixée est appelée son "*fantôme*", celle ci est simplement une marche aleatoire initialisée au point où la particule se fixe. En reprenant les notations de [LBG92] et [LL21], on regarde maintenant deux quantités clefs,  $M$  le nombre de particule qui atteignent  $z$  avant absorption, soit en se fixant en  $z$  soit avec leur *fantôme* et  $L$  le nombre de particule qui atteignent  $z$  avec leur *fantôme*. Plus formellement si  $\tau_z(i)$  est le temps que la  $i$ -eme particule atteigne  $z$ ,  $\tau_z(i)$  est le temps que la particule soit absorbée et  $\sigma(i)$  et le temps qu'elle se fixe, alors on a que

$$\begin{cases} M &= \sum_{i=1}^t \mathbf{1}_{\tau_z(i) < \tau_{V^*}(i)} \\ L &= \sum_{i=1}^t \mathbf{1}_{\sigma(i) < \tau_z(i) < \tau_{V^*}(i)}. \end{cases}$$

On peut déjà remarquer que  $z$  n'est pas rempli si et seulement si  $M = L$ . La quantité  $M$  n'est en réalité pas liée au processus d'IDLA,  $M$  ne fait que compter le nombre de particule qui atteignent  $z$  dans le premier modèle de *particules indépendantes*. La deuxième quantité,  $L$ , par contre fait intervenir la fixation qui est beaucoup plus délicate à traiter, pour cela on va coupler le processus et éliminer toute question de fixation.

Le premier point à remarquer est que toute particule qui atteint  $z$  avec son *fantôme* a du se fixer avant, deuxièmement il y a au plus une fixation par site. La combinaison des deux fait qu'on peut majorer  $L$  par le nombre de particule qui atteignent  $z$  si on initialisait une particule à chaque sommet de  $G$ . Pour être plus précis, le couplage que l'on fait est le suivant : si  $y$  est un sommet de  $G$  alors  $X^y$  est le *fantôme* de la particule qui se fixe a  $y$ , si une telle particule existe, sinon  $X^y$  est une marche aleatoire indépendante du reste initialisée en  $y$ . Une telle marche est aussi appelée "*fantôme artificiel*". Alors les  $(X^y)_{y \in V}$  sont distribués comme des **marches indépendantes** initialisées à leur sommet respectif. Si  $\tau_z(y)$  est le temps que la marche  $X^y$  atteigne  $z$   $\tau_z(y)$  est le temps que la marche soit absorbée alors formellement

$$\tilde{L} = \sum_{y \in V} \mathbf{1}_{\tau_z(y) < \tau_{V^*}(y)}.$$

Là encore on a pu éliminer le problème de la fixation par l'observation que  $L \leq \tilde{L}$ .

Le point clef est qu'il y a une différence non-négligeable entre  $M$  et  $\tilde{L}$ , en effet un calcul montre que  $\mathbb{E}[M] = (1 + \varepsilon)|V|p(z)$  et  $\mathbb{E}[\tilde{L}] = |V|p(z)$ , mais  $M = L$  implique que  $M \leq \tilde{L}$  ce qui est improbable. En effet si  $E_z = \{M = L\}$  est l'événement que  $z$  ne soit pas rempli pas l'IDLA au temps  $t$ , alors quelque soit le choix de  $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(E_z) = \mathbb{P}(M = L) \leq \mathbb{P}(M \leq a) + \mathbb{P}(L \geq a) \leq \mathbb{P}(M \leq a) + \mathbb{P}(\tilde{L} \geq a).$$

En particulier pour  $a = (\mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[\tilde{L}])/2$  on peut appliquer l'inegalite de Bernstein (3) a  $\mathbb{P}(M \leq a)$  et  $\mathbb{P}(\tilde{L} \geq a)$  pour avoir

$$\mathbb{P}(E_z) \leq 2 \exp\left(-\frac{|V|\varepsilon^2}{24}p(z)\right).$$

On peut ensuite facilement conclure en majorant  $\mathbb{P}(T_{\text{full}} \geq N + \varepsilon N) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{z \in V} E_z\right)$  par la somme des  $\mathbb{P}(E_z)$  et prendre un minimum sur les  $p(z)$ .  $\square$

### 3.2 Concentration avec remplissage lent

En reprenant les mêmes notations que dans la sous-section précédente, on se fixe un graph fini et simple  $G = (V, E)$  avec des puits  $V^*$ . Pour  $z$  un sommet  $p(z)$  probabilité moyenne d'atteinte définie en (2). Dans cette seconde partie on suppose que le graph n'est pas bien connecté, plus précisément on suppose que le graph a une *composante macroscopique* qui est *difficile d'accès*. Dans ce cas cette composante ralentira tout le remplissage, une fois que cette composante est remplie nécessairement le reste sera aussi. En particulier on montre que si le temps moyen d'absorption d'une particule uniformément initialisée dans le graph est petit alors  $T_{\text{full}}$  sera concentré, de plus on aura que  $T_{\text{full}} \gg |V|$  presque sûrement. Dans le cas extrême où ce temps d'absorption moyen est fini alors  $T_{\text{full}} = \Theta(|V| \log |V|)$ . Nous verrons plus tard que ce cas correspond, entre autres, au cas de boules dans des graphs non-moyennables.

**Concentration faible pour les processus croissant** Le premier ingrédient de la preuve est un résultat très général de Aldous [Ald16] sur les *chaines de Markov croissante*. On se place maintenant pour un moment dans un cadre général. Soit  $(Z_t)$  une chaîne de Markov en temps continue ou discret sur un espace fini d'états  $\Sigma$ . On se fixe  $\Sigma_0$  un ensemble d'état et on considère le temps d'atteinte

$$T = \inf\{t \geq 0, Z_t \in \Sigma_0\}.$$

#### Définition 3.2

On dit que la chaîne  $Z_t$  est *croissante* si pour tout  $A, B \in \Sigma$  tel que la transition  $A \rightarrow B$  est possible, on ait avec  $h(A) := \mathbb{E}_A[T]$ , l'inégalité

$$h(B) \leq h(A).$$

#### Proposition 3.1

Si on prend  $\Sigma_0 = \{\mathbf{1}_V\}$  ce qui correspond à  $T = T_{\text{full}}$ , dans la définition précédente pour l'IDLA sur un graph fini  $G = (V, E)$ , alors la chaîne de Markov associée est *croissante*.

Dans le cas de l'IDLA le concept de croissance est clair, si  $\Sigma_0$  est la configuration pleine alors croissance veut dire que si on ajoute des particules initiales le *temps de remplissage* sera réduit.

*Démonstration.* Soit  $A \subset B \subset V$ , tout mouvement pour l'IDLA initialisé à  $\mathbf{1}_A$  est aussi un mouvement valide pour le processus initialisé à  $\mathbf{1}_B$ , ce qui définit un couplage entre les deux processus. Lors que l'IDLA initialisé à  $\mathbf{1}_A$  se termine alors le même processus aura déjà rempli  $V$  s'il était initialisé à  $B$ . En résumé par ce couplage  $h(B) \leq h(A)$ .  $\square$

Le résultat d'Aldous pour les chaînes croissantes dans le sens précédent est le suivant :

### Lemme 3.1 : (Lemma 1.1 de [Ald16])

Si  $(Z_t)$  est croissante alors

$$\frac{\text{Var}(T)}{\mathbb{E}[T]} \leq \max_{\substack{A \rightarrow B \\ \text{est possible}}} h(A) - h(B)$$

Pour le cas de l'IDLA nous allons montrer que ce maximum est atteint pour  $|A| = |V| - 1$ .

### Lemme 3.2 : Concentration faible

Soit  $G = (V, E)$  un graph fini et  $T_{\text{full}}$  le **temps de remplissage** du processus d'IDLA. Pour  $z \in V$   $p(z)$  est défini comme dans (2).

On a

$$\frac{\text{Var}(T_{\text{full}})}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} \leq \frac{1}{\inf_z p(z)} \leq |V|.$$

En effet si  $A = V - \{x\}$  alors l'IDLA initialisé à  $A$  est juste une succession de marches aleatoire indépendante qui s'arrêtent dès que l'une d'elle touche  $x$ . Ce qui signifie que  $h(A)$  est l'espérance d'une variable géométrique de paramètre  $p(z)$ , donc  $h(A) = 1/p(z)$ . Puisque la seule transition possible partant de  $A$  est  $A \rightarrow V$  et que  $h(V) = 0$ , il suffit maintenant de montrer que le maximum dans Lemme 3.2 est atteint pour  $|A| = |V| - 1$ .

*Démonstration.* Soit  $A \subset V$ , tel que  $|A| < |V| - 1$ . Nous allons montrer le résultat par *réurrence* sur  $|A|$ .

Si  $A \rightarrow B$  est possible alors il existe  $x \in V - A$  tel que  $B = A \cup \{x\}$ . Si  $y_x$  est le premier site vide visité par le *fantôme* de la particule qui a rempli  $x$  dans l'IDLA initialisé à  $A$ . Soit  $V_x$  la configuration de l'IDLA initialisé à  $A$  lorsque  $x$  est rempli. On peut à nouveau coupler l'IDLA initialisé à  $A$  et à  $B$ , en étant identique avant de remplir  $x$  et *indépendant* après. Avec ce couplage

$$h(A) - h(A \cup \{x\}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{y_x \in V} (h(V_x) - h(V_x \cup \{y_x\}))].$$

Puisque  $x \in V_x$  alors  $|V_x| > |A|$  ce qui conclue la *réurrence* et comme mentionné précédemment cela conclue la preuve.  $\square$

Ce lemme permet évidemment de déduire des résultat de concentration pour  $T_{\text{full}}$ . En effet il suffit que  $\inf_z p(z) \mathbb{E}[T_{\text{full}}] \rightarrow \infty$  pour que  $T_{\text{full}}$  soit concentré. Une première conséquence intéressante de ce résultat est que pour le régime étudié en première partie,  $\inf_z p(z) \gg \log |V|/|V|$ , on a par *l'inégalité classique de Bienaymé-Tchebychev* et l'observation que  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}] \geq |V|$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \log |V|}\right).$$

Ce qui peut donner une estimée plus précise de la déviation de  $T_{\text{full}}$  que Théorème 3.1.

Cependant dans le cas de mauvaise connectivité qu'on étudie dans cette partie on aura d'autre estimée de  $\inf_z p(z)$  que l'observation  $p(z) \geq 1/|V|$ . On devra donc se tourner vers une estimée plus précise de  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}]$ , on montrera que sous certaine condition  $T_{\text{full}} = \Theta(|V| \log |V|)$ .

**Borne inférieure pour le temps moyen de remplissage** Si on a un *ensemble de sommet macroscopique*  $|A|$  tel que tous les  $p(z)$  pour  $z \in A$  sont petit, c'est à dire d'ordre  $1/|V|$ , alors  $T_{\text{full}}$  sera au moins d'ordre  $|V| \log |A|$ . En particulier si  $|A|$  est du même ordre que  $|V|$  alors  $T_{\text{full}} = \Theta(|V| \log |V|)$ . En effet rappelons que  $T_{\text{full}}$  est majorée par le temps qu'il faut pour un collectionneur à obtenir  $|V|$  vignette, c'est à dire  $|V|H_{|V|} \sim |V| \log |V|$ , ou  $H_n$  est le  $n$ -ème nombre harmonique.

### Proposition 3.2

Soit  $G = (V, E)$  un graph fini avec  $A \subset V$  et  $T_{\text{full}}$  le **temps de remplissage** du processus d'IDLA. Alors

$$\mathbb{E}[T_{\text{full}}] \geq \frac{\log |A|}{\sup_{z \in A} p(z)}.$$

En particulier si  $\sup_{z \in V} p(z) \leq K/|V|$  alors  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}] \geq |V| \log |V|/K$ . Donc  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}] = \Theta(|V| \log |V|)$ . De plus comme mentionné précédemment cela implique que  $T_{\text{full}}$  est concentré.

*Démonstration.* Dans la suite de la preuve nous considérons toujours l'IDLA initialisé à  $V - A$ . Rappelons par monotonie  $\mathbb{E}[T_{\text{full}}] \geq \mathbb{E}_{V-A}[T_{\text{full}}]$ .

Soit  $T_k$  le temps entre la fixation du  $(k-1)$ -ème site et le  $k$ -ème site. Si  $A_k$  sont les sites non rempli par l'IDLA lors de la fixation de la  $(k-1)$ -ème particule alors  $T_k$  est une variable géométrique de paramètre  $p(A_k)$ , la probabilité d'une particule uniformément initialisée d'atteindre un élément de  $A_k$  avant d'être absorbée. Écrivons  $T_{\text{full}} = \sum_{k=1}^{|A|} T_k$  tel que

$$\mathbb{E}_{V-A}[T_{\text{full}}] = \sum_{k=1}^{|A|} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{p(A_k)} \right].$$

On peut ensuite observer que  $p(A_k) = \mathbb{P}_*(\exists z \in A - A_k, \tau_z < \tau_{V^*})$ . On peut donc faire la majoration suivante

$$p(A_k) \leq \sum_{z \in A_k} p(z) \leq (|A| - k + 1) \sup_{z \in A} p(z).$$

On conclut par l'inégalité  $H_n \geq \log n$  et

$$\mathbb{E}_{V-A}[T_{\text{full}}] \geq \frac{1}{\sup_{z \in A} p(z)} \sum_{k=1}^{|A|} \frac{1}{k} \geq \frac{\log |A|}{\sup_{z \in A} p(z)}.$$

□

**Critère de remplissage lent et concentration** Isoler un composante  $A \subset V$  qui est difficilement atteignable peut s'avérer difficile à faire explicitement. Cependant en moyennant on peut arriver à une condition bien plus intuitive en exploitant le *temps moyen d'absorption*. Soit  $\tau_{V^*}$  le temps d'atteindre  $V^*$  pour une marche uniformément initialisée  $\tau_{V^*}$  est relié à la moyenne des  $p(z)$ . En effet on peut remarquer que le nombre

de fois que  $z \in V$  est visité par la marche aleatoire avant absorption est minoré par l'indicatrice que  $z$  est visité avant absorption. En sommant on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{z \in V} p(z) &= \mathbb{E} \left[ \sum_{z \in V} \mathbf{1}_{\tau_z < \tau_{V^*}} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{z \in V} |\{X_t = z; t < \tau_{V^*}\}| \right] \\ &= \mathbb{E}[\tau_{V^*}]. \end{aligned}$$

Cet sommation nous permet maintenant de simplifier la proposition et d'obtenir un nouveau résultat de concentration, cette fois dans le cas des graphs avec un temps d'absorption très rapide.

### Théorème 3.2

Soit  $G = (V, E)$  un graph fini et  $T_{\text{full}}$  le **temps de remplissage** du processus d'IDLA. Soit  $\tau_{V^*}$  le *temps moyen d'absorption* pour une marche uniformément initialisée. On a l'inégalité de concentration suivante

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{2 \sum_{z \in V} p(z)}{\log(|V|/2) \varepsilon^2} \leq \frac{2\mathbb{E}[\tau_{V^*}]}{\log(|V|/2) \varepsilon^2}.$$

De plus

$$|V| \sum_{k=1}^{|V|} \frac{1}{k} \geq \mathbb{E}[T_{\text{full}}] \geq \frac{1}{2\mathbb{E}[\tau_{V^*}]} |V| \log(|V|/2).$$

Nous verrons plus tard par un argument spectral que si  $G$  est un sous-graph fini d'un graphe non-moyennable alors  $\mathbb{E}[\tau_{V^*}]$  est fini, c'est à dire uniformément majoré. Ce qui implique la propriété surprenante que pour tout suite de sous-graph fini dont la taille tend vers l'infini on a concentration de  $T_{\text{full}}$  et donc cutoff en séparation de l'ARW. De plus on a l'ordre du temps de mélange pour l'ARW qui est  $\Theta(|V| \log |V|)$ . Un exemple concret de tel graph est comme nous verrons plus loin, l'arbre  $r$ -régulier infini.

*Démonstration.* On pose

$$A = \left\{ z \in V, p(z) \leq \frac{2 \sum_{z \in V} p(z)}{|V|} \right\}.$$

En sommant sur  $z \in A^c$  on a  $\sum_{z \in V} p(z) \geq \sum_{z \notin A} p(z) \geq 2 \sum_{z \in V} p(z) (|V| - |A|) / |V|$ . En réarrangeant on obtient que  $|A| \geq |V|/2$ . On peut alors combiner tous les ingrédients de la preuve, le Lemme 3.2 et la Proposition 3.2 pour l'ensemble  $A$  introduit précédemment,

combinée a l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour avoir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{Var}(T_{\text{full}})}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]^2 \varepsilon^2} \\ &\leq \frac{|V|}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]^2 \varepsilon^2} \\ &\leq \frac{2 \sum_{z \in V} p(z) |V|}{|V| \log(|A|) \varepsilon^2} \\ &\leq \frac{2 \sum_{z \in V} p(z)}{\log(|V|/2) \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Analyse et comparaison des deux résultats

Les deux résultats présentés prouvent essentiellement la même chose, concentration pour le **temps de remplissage**, mais avec des conditions qui peuvent paraître assez différentes. Ces cas sont en réalité complémentaire. Dans le premier cas on requière un contrôle uniforme des  $p(z)$ , avec un seuil a  $p(z) \gg \log |V|/|V|$  dans le second on regarde le temps moyen pour s'échapper. Cependant comme nous avons fait remarque les deux critère sont reliée, en moyennant les  $p(z)$ , on obtient alors une dichotomie

- Si les  $p(z)$  sont uniformément grand devant  $\log |V|/|V|$  alors on obtient une estimé exacte du *temps de remplissage*,  $T_{\text{full}} \sim |V|$ .
- Si la moyenne des  $p(z)$  est petite devant  $\log |V|/|V|$  alors on a encore concentration du *temps de remplissage* et l'on sait que  $T_{\text{full}} \gg |V|$ . Si de plus on sait la moyenne des  $p(z)$  est d'ordre  $1/|V|$ , alors on connaît l'ordre de grandeur du *temps de remplissage*,  $T_{\text{full}} = \Theta(|V| \log |V|)$ .

Ces deux cas sont les deux extrêmes car l'on sait que  $T_{\text{full}} \geq |V|$  et d'autre part en comparant au problème du collectionneur de vignette on sait que  $T_{\text{full}} \leq |V| \log |V| + \mathcal{O}(|V|)$ .

Un corollaire des deux résultat et que si les probabilité d'atteindre un sommet avant d'être absorbé dépend peu du sommet choisi alors il n'y a pas d'écarts entre les deux résultat, on peut alors toujours conclure à la concentration du *temps de remplissage*. Dans ce cas maximum, minimum et moyenne sont du même ordre ce qui permet de satisfaire en tout cas au moins une des conditions pour la concentration. En réalité il suffit de supposer qu'il n'y a pas de "sommet isolé" c'est à dire que  $\inf_{z \in V} p(z)$  est du même ordre que la moyenne des  $p(z)$ .

#### Corollaire

Soit  $G = (V, E)$  une suite de graph finis avec  $T_{\text{full}}$  leur *temps de remplissage*. On suppose qu'il n'y a pas de "sommet isolé". Plus précisément on suppose que le minimum des  $p(z)$  est du même ordre que la moyenne des  $p(z)$ . Autrement dit on suppose qu'il existe une constante universelle  $C > 0$ , tel que uniformément sur la suite on ait

$$C \inf_{z \in V} p(z) \geq \frac{\sum_{z \in V} p(z)}{|V|}.$$

Dans ce cas  $T_{\text{full}}/\mathbb{E}[T_{\text{full}}]$  converge vers 1 en probabilité.

Le fait qu'on ait besoin d'un contrôle uniforme des  $p(z)$  peut s'expliquer par un contre-exemple de concentration. Supposons qu'on ait un graph qui se remplit rapidement disons  $T_{\text{full}} \sim |V|$ , nous verrons que c'est par exemple le cas pour le segment avec puits aux bords, et on rajoute un sommet  $x_0$  qui est uniquement connectée à un puits. Le temps de remplir ce sommet est une variable géométrique  $T_{x_0}$  de paramètre  $1/(|V| + 1)$ .

En moyenne le nouveau temps de remplissage  $\widetilde{T}_{\text{full}}$  sera toujours d'ordre  $|V|$ , en effet on peut majorer  $\mathbb{E}[\widetilde{T}_{\text{full}}]$  par la somme des espérance de  $T_{x_0}$  et  $T_{\text{full}}$  puisque  $\widetilde{T}_{\text{full}}$  est le maximum des deux. On obtient alors que  $\mathbb{E}[\widetilde{T}_{\text{full}}] \leq 2|V| + o(|V|)$ . Mais le temps pour remplir le sommet isolée est une variable géométrique, ce qui fait que par exemple avec probabilité non-nulle asymptotiquement  $\widetilde{T}_{\text{full}} \geq 3|V|$ . Il est donc impossible que  $\widetilde{T}_{\text{full}}$  soit concentré.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par compacité de  $[0, 1]$  on prend une *extraction* de graphes tel que la quantité  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$  converge. Cette sous-suite satisfait la même hypothèse que dans l'énoncé du corollaire.

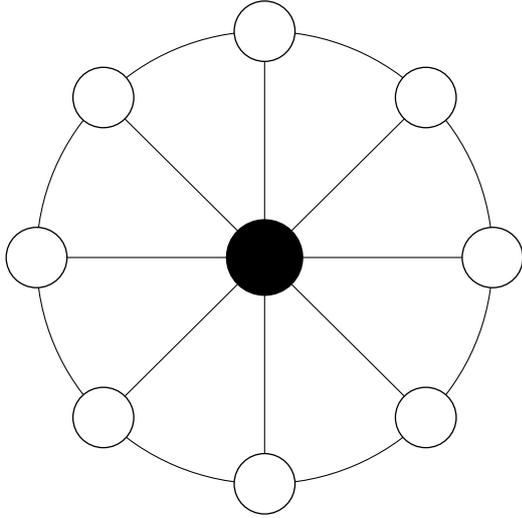
1. Si  $\inf_z p(z)|V| \rightarrow \infty$  alors on sait par le Lemme 3.2 que le temps de remplissage est concentré. Donc pour cette *sous-suite*  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$  converge vers 0.
2. Dans le cas contraire il existe un nombre  $K > 0$  et une *sous-extraction* tel que  $\inf_z p(z)|V| < K$ . Sous nos hypothèse cela implique que  $\sum_{z \in V} p(z)$  est bornée par  $KC$ . Par Théorème 3.2 cela signifie que pour cette *sous-extraction*  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$  converge vers 0. Or *l'extraction initiale converge*, elle convergeait donc forcément vers 0.

En conclusion nous avons montré que toute sous-suite convergente de  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$  converge vers 0, par compacité de  $[0, 1]$  cela signifie que  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$  converge vers 0. En d'autres termes,  $T_{\text{full}}/\mathbb{E}[T_{\text{full}}]$  converge vers 1 en probabilité.  $\square$

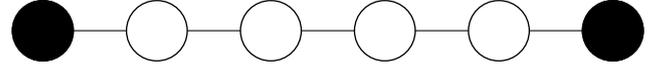
**Deux exemples concrets** Nous allons maintenant étudier deux exemples simples pour lesquels le calcul des probabilité d'atteindre un sommet peut se calculer explicitement et nous allons regarder ce que cela implique sur le temps de remplissage des graphes respectifs. Le premier est le graph roue  $W_n$  (Figure 1a), constitué d'un  $n$ -cycle dont tous les sommets sont reliés à un puits. Le second est le graph chemin  $P_n$  (Figure 1b), avec des puits aux deux extrémités.

Ces deux graphes ont des comportements opposés, cela peut déjà se voir par le fait que dans le cas temps passe avant absorption est très court dans le cas de la roue (en réalité il ne dépend pas de la taille de la roue) alors que le temps passé dans le chemin est donné par le célèbre problème de la ruine du joueur. Pour rappel si un joueur commence avec  $i$  euros et après une unité de temps il a 50% de chance de gagner ou perdre 1 euros, alors un résultat classique sur le problème de la ruine du joueur dit qu'il faut attendre en moyenne  $i(n - i)$  avant que le joueur se ruine ou atteigne  $n$  euros. Le temps moyen d'absorption peut donc être déduit, pour chemin d'ordre  $n$  on a

$$\mathbb{E}[\tau_{V^*}^{P_n}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i(n - i) = \frac{n^2 - 1}{6}.$$



(a) Le graph roue a 8 sommets et un puits,  $W_8$



(b) Le graph chemin a 4 sommets et 2 puits aux extrémités,  $P_4$

En contraste, pour la roue le temps d'absorption ne dépend pas du sommet initial et suit une loi géométrique de paramètre  $1/3$ . En effet a chaque étape la probabilité d'être absorbé est  $1/3$ , ce qui fait que quelque soit  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{E}[\tau_{V^*}^{W_n}] = 3$ .

Pour la roue on peut donc estimer les probabilités d'atteindre un sommet  $p$  qui ne dépend pas du sommet choisi, on a pour tout  $z \in W_n$ ,

$$\frac{1}{n} \leq p(z) = \frac{1}{n} \sum_{y \in W_n} p(y) \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}[\tau_{V^*}^{W_n}] = \frac{3}{n}.$$

On voit que les  $p(z)$  sont d'ordre  $1/n$  ce qui fait que par Théorème 3.2 le temps de remplissage de la roue  $T_{\text{full}}^{W_n}$  est concentré autour de son espérance. De plus on a que  $T_{\text{full}}^{W_n} = \Theta(n \log n)$  et l'inégalité de concentration suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}^{W_n}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}^{W_n}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{3}{\log(n)\varepsilon^2}.$$

Pour le cas du chemin on peut remarquer que ce graph est équivalent au graph cycle d'ordre  $n + 1$  auquel on désigne un sommet comme puits, par le résultat d'Aldous [Ald89, Proposition 3] on sait alors que pour tout sommet  $z \in P_n$ , on a  $p(z) = 1/2$ . Par Théorème 3.1 on en conclue aussi que le temps de remplissage est concentré autour de  $n$ , avec l'inégalité de concentration

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(T_{\text{full}}^{P_n} \geq n + \varepsilon n) \leq 2n \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{48}\right).$$

## 4 Application au cutoff de l'ARW sur deux types de graphs

Dans cette section on utilise les deux résultat de concentration généraux pour le temps de remplissage de l'IDLA pour montrer des cutoffs de l'ARW sur divers sous-graph de graphs infini. On rappelle que l'objectif est de partir d'un graph transitif infini, tel que la grille  $\mathbb{Z}^d$  et de prouver cutoff pour l'ARW sur des boites fini qui remplissage le graph

initiale. Comme nous avons vu dans la section précédente en contrôler les temps de sorti de ces boites on peut ensuite déduire des résultats de concentration pour le temps de remplissage de l'IDLA qui se traduisent en cutoff en séparation.

Dans la suite nous allons développer certain outils qui permettrons d'estimer ces probabilités d'atteinte, en particulier pour des grilles de  $\mathbb{R}^d$  et pour des graphes non-moyennables. Ces deux exemples sont à l'oppose l'un de l'autre. Dans le premier cas on retrouve un résultat analogue a [LBG92] qui prouve pour le modèle a une source que les boules euclidienne  $B_r$  se remplissent en temps  $|B_r|$ . Pour les graphes non-moyennables nous verrons que les temps de sortis moyen sont fini, ce qui fait que comme dans le cas de la roue on aura a nouveau concentration et un temps de remplissage en  $\Theta(|V| \log |V|)$ .

### 4.1 Cas des grilles dans l'espace Euclidien

On se place maintenant dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 2$ . On regarde des grilles similaire a  $\mathbb{Z}^d$  et on regarde la suite des sous-graphs formés par l'intersection de la boule Euclidienne  $B_r$  et la grille. Nous allons prouver cutoff en séparation pour l'ARW dans ces boules lorsque l'on place des puits à leur bords. Pour cela, nous passons par l'étude du temps de remplissage de l'IDLA sur ces mêmes sous-graphs. L'objectif est de montrer que le temps de remplissage de  $B_r$  est équivalent a  $|B_r|$ .

Nous commençons par préciser ce qu'on entend par des "grilles" ou réseaux.

#### Définition 4.1

Un réseau  $\Lambda$  est un sous-groupe discret pour l'addition de  $\mathbb{R}^d$ . Quitte a réduire la dimension on supposera toujours que  $\Lambda$  engendre  $\mathbb{R}^d$ , on dira alors que  $\Lambda$  est de dimension  $d$ .

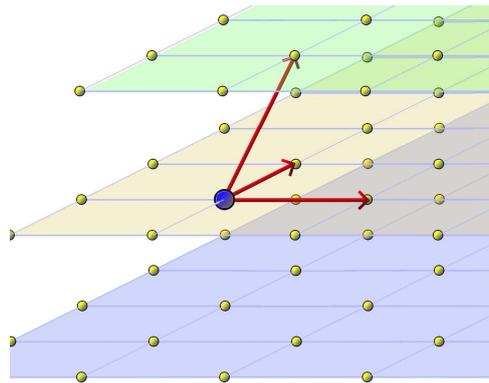


FIGURE 2 – Exemple de réseaux dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . (Source wikipedia : Réseau (géométrie))

Comme pour sous-groupes discret de  $\mathbb{R}$ , on peut se convaincre de l'existence d'une base  $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1,\dots,d}$  de  $\Lambda$ , tel que tout élément s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients entier d'élément de  $\mathcal{B}$ . Le graph que l'on considère est alors le graph de Cayley généré par  $\mathcal{B}$ , en d'autre terme deux sommets  $x, y \in \Lambda$  sont reliés si  $x - y \in \mathcal{B}$  ou  $y - x \in \mathcal{B}$ . On confond ce graph avec  $\Lambda$ .

Fixons maintenant un grille  $\Lambda$  de dimension  $d \geq 2$  et une base  $\mathcal{B}$ . On dénotera  $B_r$  l'intersection de la boule Euclidienne de rayon  $r$  et  $\Lambda$ . On dénotera aussi  $S_r$  l'ensemble

des sommets de  $\Lambda - B_r$  qui sont relié a un élément de  $B_r$ .  $S_r$  sera désigné comme puits pour l'IDLA et l'ARW sur  $B_r$ .

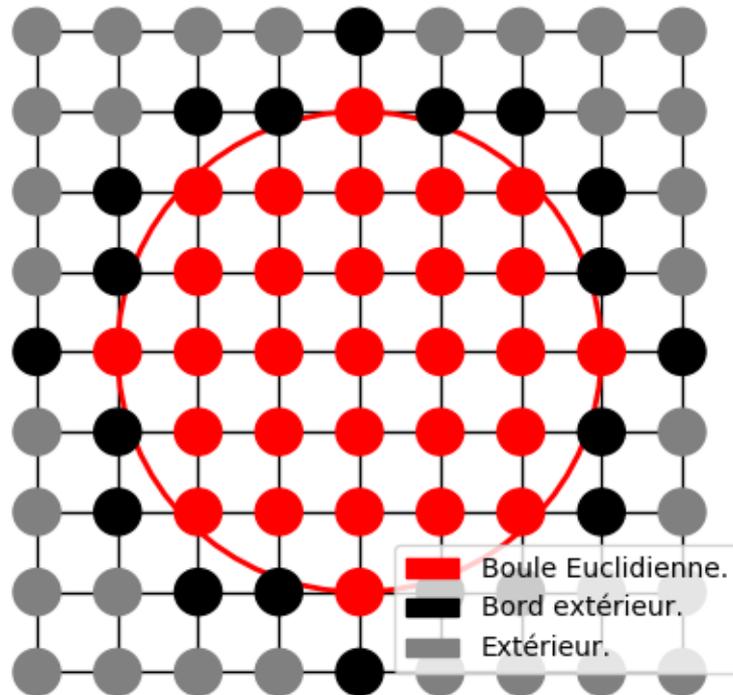


FIGURE 3 – Exemple de sous-graph  $B_r$  dans la cas de la grille  $\mathbb{Z}^2$ .

**Fonction de Green de réseaux en dimension fini** L'étude des temps de sorti de  $B_r$  peut se relier à l'étude classique des fonctions de Green discrète. Ce qui nous permettra d'estimer la quantité recherchée,  $p(z)$ . Des estimées de ces fonctions de Green sont bien connu dans notre cadre de graph transitifs.

**Définition 4.2**

Pour  $x, y \in B_r$  la fonction de Green  $G_r(x, y)$  est le nombre moyen de visite de  $y$  avant absorption pour une marche initialisée a  $x$ . En d'autre termes si  $X$  est la marche aléatoire simple sur  $\Lambda$  alors

$$G_r(x, y) = \mathbb{E}_x \left[ \sum_{t < \tau_{S_r}} \mathbf{1}_{X_t=y} \right],$$

La fonction de Green discrète est en fait la fonction de Green associée au Laplacien discret  $\Delta$  aussi connu sous le nom de d'opérateur de différence finie. Si  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction

réelle alors

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y) - f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1) - f(x)].$$

Si on suppose que  $f$  est support dans la boule  $B_r$ , ce qui correspond a la condition aux limites de Dirichlet nulle, alors

$$\begin{aligned} G_r \Delta f(x) &= \sum_{y \in B_r} G_r(x, y) \mathbb{E}_y[f(X_1) - f(y)] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \sum_{t < \tau_{S_r}} \sum_{y \in B_r} \mathbf{1}_{X_t=y} \mathbb{E}_y[f(X_1) - f(y)] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \sum_{t < \tau_{S_r}} \mathbb{E}[f(X_{t+1}) - f(X_t) | X_t] \right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_x[f(X_{\tau_{S_r}})]}_{=0} - f(x). \end{aligned}$$

On en déduit que  $G_r \Delta = -I$  lorsqu'on se restreint aux fonctions à support dans  $B_r$ . On peut déjà observer que puisque le graph est simple,  $\Delta$  est symétrique, donc  $G_r$  l'est aussi.

L'identité  $G_r \Delta = -I$  fait le lien avec la fonction de Green pour le Laplacien usuel dans l'espace Euclidien. Par exemple en dimension  $d = 3$  la solution de  $\Delta G(x) = \mathbf{1}_{x=0}$  est  $G(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|}$  et en dimension  $d = 2$  la solution est  $G(x) = \frac{1}{2\pi} \log \|x\|$ . On voit qu'il y a un comportement différent selon la dimension  $d = 2$  et  $d \geq 3$  dans le premier cas la fonction de Green diverge, alors qu'en dimension supérieure elle sera bornée. Contrairement au cas continue le calcul explicite des fonctions de Green discrète n'est pas possible, cependant par comparaison on peut établir leur ordre de grandeur. En particulier comme dans le cas continue, si  $d \geq 3$   $G_r(x, y)$  sera uniformément borné sur  $r \geq 1$  et  $x, y \in B_r$ , se qui permettra d'avoir une estimation sur les probabilité d'atteinte. Pour  $d = 2$  on aura une estimation plus faible,  $G_r(x, x) = \mathcal{O}(\log r)$  mais on pourra toujours avoir concentration.

L'intérêt principale des fonctions de Green dans notre cas est leur relation avec les probabilité d'atteindre un certain sommet.

#### Proposition 4.1

Pour tout  $z \in B_r$ , si  $p(z)$  est définie comme en (2) et  $G_r$  est la fonction de Green discrète de  $B_r$  alors

$$p(z) = \frac{\mathbb{E}_z[\tau_{S_r}]}{|B_r| G_r(z, z)}.$$

Cette identité nous permettra d'estimer les  $p(z)$ , rappelons que nous cherchons a utiliser le Théorème 3.1 pour prouver que le temps de remplissage  $T_{\text{full}}$  vérifie presque surement  $T_{\text{full}} \sim B_r$ . Il nous faut donc pour cela montrer que uniformément sur  $z \in B_r$  on a  $p(z) \gg \log |B_r|/|B_r|$ . Par comparaison au cas continue on saura que  $G_r(z, z)$  est d'ordre constant (pour  $d \geq 3$ ) il restera alors qu'a montrer que  $\mathbb{E}_z[\tau_{S_r}] \gg \log r$  uniformément sur  $z \in B_r$ .

*Démonstration.* Commençons par remarque que la somme des  $G_r(z, y)$  pour  $y \in B_r$  compte le temps moyen passe avant absorption partant de  $x$ , c'est à dire

$$\sum_{y \in B_r} G_r(z, y) = \mathbb{E}_z[\tau_{S_r}].$$

En peut ensuite remarquer que si une particule partant de  $y$  atteint  $z$  par la propriété de Markov compter le nombre de fois qu'elle touche  $z$  revient après à compter le nombre de retour en  $z$ . Cette observation se traduit par l'identité  $G_r(y, z) = \mathbb{P}_y(\tau_z < \tau_{S_r})G_r(z, z)$ . En combinant ces deux expression on obtient

$$\mathbb{E}_z[\tau_{S_r}] = G_r(z, z) \sum_{y \in B_r} \mathbb{P}_y(\tau_z < \tau_{S_r}),$$

ce qui est l'identité désirée. □

Il y a aussi une autre interprétation de  $G_r(z, z)$ , en effet le nombre de retour en  $z$  avant absorption est une loi géométrique de paramètre la probabilité de retourner en  $z$  avant absorption. Un résultat bien connu pour les marches aléatoires simples dans la grille  $\mathbb{Z}^d$  est que pour  $d \geq 3$  la marche est *transiente*. Lorsqu'on s'intéresse au fonction de Green cette propriété se traduit par le fait que pour tout  $z$  fixée dans  $\mathbb{Z}^d$  on à que la fonction de Green  $G_r(z, z)$  converge de manier croissante vers une même valeur, cette valeur étant le nombre moyen de retour a l'origine d'un marche aleatoire simple. Un résultat important de Varopoulos [Var85] montre en réalité que cette propriété s'étant a tout graph de "*dimension 3 ou plus*" c'est a dire des graphs **croissance** au moins aussi grande qu'un polynôme de degré 3. Des estimées plus récente comme par exemple celle de Tesseira et Tointon [TT20] permettent aussi de montrer que pour les graph a **croissance polynomial de degré 2** permettent de connaitre aussi l'ordre de la fonction de Green.

### Définition 4.3

La **croissance** graph transitif  $G = (V, E)$  est la fonction  $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $b(r)$  est la taille de boule de rayon  $r$  du graph de  $G$ . L'origine de la boule n'a pas d'importance comme on considère des graphs transitifs.

On dit que  $G$  est a *croissance au moins polynomial de degré  $d$*  s'il existe une constante  $c > 0$  tel que

$$b(r) \geq cr^d.$$

En particulier des graphs fini on croissance constante, et comme le confirme l'intuition les réseaux de dimension  $d$  sont a croissance polynomiale de degré  $d$ . En peut par exemple s'en convaincre en remarquant que le cardinal de boule de graph de rayon  $r$  d'un réseau en dimension  $d$  est le même que l'ensemble suivant  $\left\{ \sum_{i=1}^d l_i \leq r; l_i \in \mathbb{N} \right\}$ , c'est à dire la boule de graph de  $\mathbb{Z}^d$ .

**Proposition 4.2**

Si  $\Lambda$  est un réseau de dimension  $d$  alors il existe une constante  $K$  tel que

$$b(r) \sim Kr^d.$$

Cette proposition combinée aux résultats de [Var85] et [TT20] impliquent directement un contrôle de la croissance des fonctions de Green. La seule nuance est que nous nous intéressons à des boules *Euclidienne* plutôt que des boules de graph mais on peut facilement comparer les deux pour se convaincre du suivant.

**Corollaire**

Soit  $\Lambda$  est un réseau de dimension  $d$ . Pour  $r \in \mathbb{N}$ ,  $G_r$  dénote la fonction de Green associée à la boule *Euclidienne* de rayon  $r$

— Si  $d = 2$  alors il existe une constante  $K$  qui dépend uniquement de  $\Lambda$  telle que

$$\forall r \geq 1, \forall z \in B_r, G_r(z, z) \leq K \log(r + 1).$$

Si  $d \geq 3$  alors il existe une constante  $K$  qui dépend uniquement de  $\Lambda$  telle que

$$\forall r \geq 1, \forall z \in B_r, G_r(z, z) \leq K.$$

*Démonstration.* Il nous suffit de calculer  $b(r, d)$  le volume de boule de graph de  $\mathbb{Z}^d$  de rayon  $r$ . En fixant la première coordonnée on obtient la relation

$$b(r, d) = \sum_{i=0}^r b(r - i, d - 1),$$

$b(\cdot, d)$  est donc la convolution de  $b(\cdot, d - 1)$  et de la suite constante égale à 1. On en déduit que  $b(\cdot, d)$  est la  $d + 1$ -ème puissance au sens du produit de convolution de la suite constante égale à 1. Pour calculer maintenant  $b(r, d)$  on peut par exemple considérer la fonction génératrice  $f_d(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b(r, d)x^r$ . Si la suite  $c$  est la convolution de deux suites  $a, b$  alors sa fonction génératrice est le produit des fonctions génératrices respectives de  $a$  et  $b$ . En d'autres termes on a

$$f_d(x) = \left( \sum_{r=0}^{\infty} x^r \right)^{d+1} = \frac{1}{(1-x)^{d+1}}.$$

Le développement en série entière des fonctions de la forme  $f(x) = (1-x)^\alpha$  sont bien connues, ce qui nous permet de déduire que finalement que

$$b(r, d) = (-1)^r \binom{-d-1}{r} = \frac{(d+1)(d+2) \cdots (d+r)}{r!}.$$

Cette formule a une relation intéressante avec la fonction Gamma  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . La *formule de Gauss* énonce que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

En d'autres termes

$$b(r, d) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{r^d}{d!}.$$

□

**Controle du temps pour s'échapper** Nous avons donc une estime précise des fonction de Green, par Proposition 4.1 il nous suffit donc de contrôler le second terme, le temps moyen pour être absorbé, ou dans notre contexte le temps moyen pour s'échapper de la boule Euclidienne. C'est à ce moment que le fait que l'on considère des boules Euclidienne, et non des boules de graph, entre en jeu. En effet, en utilisant la variation quadratique de la marche aleatoire simple on peu calculer ce temps d'absorption.

### Proposition 4.3

Soit  $\Lambda$  est un réseau de dimension  $d$ . Pour  $r \in \mathbb{N}$ ,  $B_r$  la boule *Euclidienne* de rayon  $r$  intersectée avec  $\Lambda$ . Soit  $\tau_{S_r}$  le temps pour s'échapper de la boule  $B_r$ . Il existe une constante  $K$  qui dépend uniquement du réseau  $\Lambda$  tel que

$$\forall r \geq 1, \forall z \in B_r, \mathbb{E}_z[\tau_{S_r}] \geq Kr.$$

Puisque la fonction de Green est au plus d'ordre  $\log(r)$  cette proposition suffit à conclure que  $\inf_{z \in B_r} p(z) \gg \log |B_r| / |B_r|$  pour  $B_r$  les boules Euclidiennes de grilles. En utilisant les résultat de la section précédente cela permet de conclure concentration pour le temps de remplissage.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}$  la base du réseau  $\Lambda$ . On dénote  $\|\mathcal{B}\|^2$  la moyenne des normes euclidienne au carre des éléments de  $\mathcal{B}$ . Soit  $X$  la marche aléatoire simple sur  $\Lambda$ . Alors  $\|X_t\|^2 - \|\mathcal{B}\|^2 t$  est une martingale. En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|X_{t+1}\|^2 | X_t] &= \|X_t\|^2 + \frac{1}{2|\mathcal{B}|} \sum_{b \in \mathcal{B}} \|X_t - b\|^2 + \|X_t + b\|^2 - 2\|X_t\|^2 \\ &= \|X_t\|^2 + \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{b \in \mathcal{B}} \|b\|^2 \\ &= \|X_t\|^2 + \|\mathcal{B}\|^2, \end{aligned}$$

où l'on utilise l'identité du parallélogramme  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . Comme  $\|X_{t \wedge \tau_{S_r}}\|^2$  est borné on peut appliquer le **théorème d'arrêt de Doob**

$$\mathbb{E}_z[\tau_{S_r}] = \frac{\mathbb{E}_z[\|X_{\tau_{S_r}}\|^2] - \|z\|^2}{\|\mathcal{B}\|^2} > \frac{r^2 - \|z\|^2}{\|\mathcal{B}\|^2}.$$

Pour  $z \in B_{r-1}$  on a déjà  $\mathbb{E}[\tau_{V^*}(z)] \geq 2r / \|\mathcal{B}\|^2$ . Pour  $z \in B_r - B_{r-1}$  il y a une probabilité non-nulle indépendamment de  $r$  que la marche initialisée à  $z$  visite  $B_{r-1}$  avant de sortir de  $B_r$ . □

Nous avons maintenant une vue complète des probabilités d'atteinte pour les boules Euclidienne de grilles en dimension fini. En résumé nous avons prouvé que

— En dimension  $d = 2$  il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\inf_{z \in B_r} p(z) \geq c \frac{r}{|B_r| \log(r)}.$$

— En dimension  $d \geq 3$  il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\inf_{z \in B_r} p(z) \geq c \frac{r}{|B_r|}.$$

Par le Théorème 3.1 et l'équivalence entre concentration du temps de remplissage et cutoff en séparation, nous avons donc démontré le résultat suivant.

### Théorème 4.1 : Boules Euclidiennes dans des réseaux

Soit  $\Lambda$  un réseau de dimension  $d \geq 2$ . Soit  $B_r$  l'intersection de boule Euclidienne de rayon  $r$  et de  $\Lambda$  avec sa frontière extérieur  $S_r$  désignée comme puits.

Soit  $T_{\text{full}}$  le temps de remplissage de l'IDLA sur  $B_r$ . Soit  $t_{\text{mix}}$  le temps de mélange pour la distance en séparation de l'ARW sur  $B_r$ .

— Si  $d = 2$ , on a une constante  $K$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \geq 1, \mathbb{P}(T_{\text{full}} \geq |B_r| + \varepsilon |B_r|) \leq 2|B_r| \exp\left(-K \frac{r}{\log(r)\varepsilon^2}\right).$$

De plus pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé nous avons **cutoff en séparation**, plus précisément nous avons  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = |B_r| + \mathcal{O}_\varepsilon(\sqrt{r \log r})$ .

— De même pour  $d \geq 3$  il existe a une constante  $K$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \geq 1, \mathbb{P}(T_{\text{full}} \geq |B_r| + \varepsilon |B_r|) \leq 2|B_r| \exp\left(-K \frac{r}{\varepsilon^2}\right),$$

et  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = |B_r| + \mathcal{O}_\varepsilon(r^{d-1/2})$ .

## 4.2 Cas des graphes non-moyennables

Dans cette partie nous allons regarder la situation opposée au cas des grilles, là où les grilles on une assez bonne connectivité et une mauvaise expansion, ce qui laisse le temps a des marches aleatoire de passer du temps avant d'être absorber, les graphes non-moyennable ont une très bonne expansion. De ce fait une particule sur un tel graph a une très grande vitesse et s'échappe très vite vers l'infini. En fait on montera que si on se fixe un domaine fini dans un graph non-moyennable, une particule initialise uniformément sur le domaine s'échappera en temps fini. En d'autre terme toute la masse est concentrée dans un voisinage fini du bord. A l'aide de Théorème 3.2 on pourra donc estimer le temps de remplissage et prouver cutoff en séparation là aussi.

On commence par définir ce que sont les graphes non-moyennable.

**Définition 4.4**

Un graph infini  $G = (V, E)$  est *non-moyennable* si

$$\inf_{A \in V} \frac{|\partial A|}{|A|} > 0,$$

ou pour un ensemble fini  $A \in V$ ,  $\partial A = \{(x, y) \in E | x \in A, y \notin A\}$  est la frontière des arêtes (edge boundary).

Autrement dit un graph non-moyennable vérifie **l'inégalité isopérimétrique forte**. Il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout ensemble de sommets fini  $A \in V$  on a

$$|\partial A| \geq C|A|. \tag{4}$$

De tel graph on donc une très bonne expansion. On peut facilement vérifier qu'un graph non-moyennable a une *croissance* (voir Définition 4.1) au moins exponentielle. En effet **l'inégalité isopérimétrique forte** (4) implique immédiatement que la croissance  $b(r)$  d'un tel graph vérifie  $b(r + 1) \geq (1 + C)b(r)$  et donc  $b(r) \geq (1 + C)^r$ . En particulier la croissance est au moins polynomial de degré 3 et donc nous savons que les fonctions de Green (voir Définition 4.1) sont uniformément bornée. Cependant cette fois nous n'aurons pas besoin de contrôler les  $p(z)$  individuellement, plutôt on regarde en moyenne. Plus précisément on s'intéresse au temps de sorti moyen.

**Théorie spectral des chaines de Markov et temps de sorti** Un outil très puissant à notre disposition pour l'analyse des chaines de Markov est la théorie spectral, l'analyse du spectre de la matrice de transition de la chaîne. Comme nous verrons les inégalités isopérimétrique sont intrinsèquement liées à la théorie spectrale.

**Définition 4.5**

A toute chaîne de Markov réversible  $X$  on peut associer un opérateur stochastique  $P : \ell^2(G) \rightarrow \ell^2(G)$  tel que

$$Pf(x) = \mathbb{E}_x[f(X)].$$

Le **trou spectral**, noté  $\lambda$ , d'une chaîne de Markov est la deuxième plus petite valeur propre de  $I - P$ . Si la chaîne est réversible  $I - P$  est un opérateur symétrique positif avec au moins une valeur propre nulle qui correspond aux fonctions constantes.

Le **trou spectral** est un outil essentielle de l'analyse des mélanges de chaines de Markov fini, en particulier **l'inegalite de Poincare**. Si  $\pi$  est la mesure invariante de la chaîne de Markov et  $f \in \ell^2(\pi)$  alors

$$\text{Var}_\pi(P^t f) \leq (1 - \lambda)^t \text{Var}_\pi(f).$$

où  $\text{Var}_\pi(f) = \int (f - \pi(f))^2 d\pi$ . Le trou spectral contrôle la convergence de  $P^t$  vers la mesure stationnaire au sens de la norme  $\ell^2$ . Dans le cas de graphs infini, un trou spectral non nul

a aussi été utilisé pour démontrer que la marche aléatoire a une vitesse asymptotique linéaire voir par exemple Woess [Woe00, Theorem 8.14]. Ces questions sont très liées à notre problème de temps de sortie et donne l'intuition du fait qu'une marche avec un trou spectral non-nul s'échappe très vite.

La première étape pour comprendre ce temps de sortie est d'établir le lien entre inégalité isopérimétrique et trou spectral, qui se fait par la caractérisation variationnelle de ce dernier. En effet par le **théorème min-max de Courant-Fischer** on a que

$$\lambda = \inf_{\substack{f \text{ fonction} \\ \text{à support compact}}} \frac{\langle (I - P)f, f \rangle}{\|f\|^2}.$$

ou  $\langle f, g \rangle = \sum_{z \in V} f(z)g(z)$  est le produit scalaire usuel sur  $\ell^2(G)$ . On peut déjà remarquer que si  $f$  est l'indicatrice d'un ensemble fini de sommets  $A$ , alors  $\|f\|^2 = |A|$ . De plus si  $P$  est la marche simple sur un graph  $G$   $r$ -régulier alors

$$\begin{aligned} \langle (I - P)f, f \rangle &= \frac{1}{r} \sum_{z \in V} \mathbf{1}_{z \in A} \sum_{y \sim z} \mathbf{1}_{z \in A} - \mathbf{1}_{y \in A} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{z \in A} \sum_{y \sim z} 1 - \mathbf{1}_{y \in A} \\ &= \frac{|\partial A|}{r}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'un trou spectral non-nul implique l'inégalité isopérimétrique forte, mais il y a en réalité équivalence.

#### Lemme 4.1

Un graph infini transitif est non-moyennable si et seulement si son trou spectral est non-nul.

La preuve est assez technique et reprend les idées de la preuve de Proposition. 4.3 de [Woe00]. Je la présente ici car je pense qu'elle peut être intéressante en soit mais n'est absolument pas essentielle à la compréhension de l'argumentation.

*Démonstration.* Soit  $G$  un graph transitif non-moyennable. Soit  $r$  le degré des sommets de  $G$ . Soit  $P$  l'opérateur associé à la marche simple sur  $G$ . Soit  $f$  à support compact. On commence par observer par symétrie que

$$\begin{aligned} \langle (I - P)f, f \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \sum_{z \in V} \sum_{z \sim y} (f(z) - f(y))f(z) + \frac{1}{r} \sum_{y \in V} \sum_{z \sim y} (f(y) - f(z))f(y) \right) \\ &= \frac{1}{2r} \sum_{z \sim y} (f(z) - f(y))^2. \end{aligned}$$

On suppose dans ce qui suit que  $f$  est *positive* pour pouvoir passer facilement du discret au continu en considérant les courbe de niveau  $A_t = \{z \in V, f(z) > t\}$ . On remarque

alors que  $\partial A_t = \{z \sim y | f(z) > t \geq f(y)\}$  est une version discrète des lignes de niveau de la forme  $\{x \in \mathbb{R}, f(x) = t\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{f(z) > f(y)} f(z) - f(y) &= \sum_{f(z) > f(y)} \int_0^\infty \mathbf{1}_{t \in [f(y), f(z)]} dt \\ &= \int_0^\infty |\partial A_t| dt. \end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{z \sim y} |f(z) - f(y)| = \sum_{f(z) > f(y)} f(z) - f(y) + \sum_{f(z) < f(y)} f(y) - f(z) = 2 \int_0^\infty |\partial A_t| dt.$$

Un calcul similaire permet de voir que

$$\int_0^\infty |A_t| dt = \int_{z \in V} \int_0^\infty \mathbf{1}_{f(z) > t} dt = \sum_{z \in V} f(z).$$

En conclusion, si on suppose qu'on a l'inégalité isopérimétrique forte, alors il existe une constante  $C > 0$  tel que pour toute fonction à support compact

$$\sum_{z \sim y} ||f(z)| - |f(y)|| \geq 2C \sum_{z \in V} |f(z)|.$$

On ne suppose maintenant plus que  $f$  est *positive*. En appliquant cette inégalité à  $f^2$  on a  $\sum_{z \sim y} |f(z)^2 - f(y)^2| \geq 2C \|f\|^2$ . En passant le terme de gauche au carré et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{z \sim y} |f(z) - f(y)| |f(z) + f(y)| \right)^2 &\leq \left( \sum_{z \sim y} (f(z) - f(y))^2 \right) \left( \sum_{z \sim y} (f(z) + f(y))^2 \right) \\ &\leq (2r)^2 \langle (I - P)f, f \rangle \|f\|^2. \end{aligned}$$

En conclusion

$$\lambda = \inf \frac{\langle (I - P)f, f \rangle}{\|f\|^2} \geq \frac{C^2}{2r^2} > 0.$$

□

On se fixe maintenant un transitif non-moyennable  $G = (V, E)$  avec un opérateur  $P$  associé à la marche aléatoire simple sur  $G$ . L'existence d'un *trou spectral* non-nul va nous permettre de conclure sur le temps d'échapper n'importe quel ensemble. En effet si  $A$  est un ensemble fini quelconque de sommet alors par la caractérisation variationnelle du trou spectral, le trou spectral de  $P_A$  la restriction de  $P$  à  $A$  est

$$\lambda(P_A) = \inf_{\substack{f \text{ fonction} \\ \text{à support dans } A}} \frac{\langle (I - P_A)f, f \rangle}{\|f\|^2} = \inf_{\substack{f \text{ fonction} \\ \text{à support dans } A}} \frac{\langle (I - P)f, f \rangle}{\|f\|^2} \geq \lambda(P).$$

Donc tous les sous-ensembles fini ont des trou spectraux uniformément minorés. Ce résultat implique que le temps de sorti moyen d'un ensemble est fini.

### Proposition 4.4

Soit  $A \subseteq G$  un ensemble fini de sommets d'un graph transitif non-moyennable  $G$ . Si  $\tau_V$  est le temps qu'une marche aleatoire uniformément initialisée dans  $A$  sorte de  $A$ , alors

$$\mathbb{E}[\tau_V] \leq \frac{1}{\lambda}.$$

ou  $\lambda$  est le trou spectral de  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $X$  la marche simple sur  $G$ , on pose  $\tau_A = \inf\{t > 0 | X_t \notin A\}$ , le temps que la marche aleatoire sorte de  $A$ . On peut déjà remarquer que si  $P_A(x, y) = \mathbf{1}_{x, y \in A} P(x, y)$  est la restriction de  $P$  sur  $A$ , alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, \tau_A < t) = P_A^t(x, y).$$

En moyennant on a pour  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{|A|} \sum_{z \in A} \mathbb{P}_z(\tau_A < t) = \frac{1}{|A|} \sum_{x, y \in A} \mathbf{1}_{x, y \in A} P(x, y) = \frac{1}{|A|} \langle P_A^t \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A \rangle.$$

Par la caractérisation variationnel du trou spectral on a aussi que

$$1 - \lambda = \sup_{\substack{f \text{ fonction} \\ \text{a support compact}}} \frac{\langle Pf, f \rangle}{\|f\|^2}.$$

On en conclu que  $\langle P_A^t \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A \rangle \leq (1 - \lambda)^t \|\mathbf{1}_A\|^2 = (1 - \lambda)^t |A|$ . Il suffit maintenant d'intégrer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tau_A] &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{|A|} \sum_{z \in A} \mathbb{P}_z(\tau_A < t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{|A|} \mathbf{1}_A^T P_A^t \mathbf{1}_A \\ &\leq \sum_{t=0}^{\infty} (1 - \lambda)^t = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

□

Ce résultat va nous permettre d'appliquer le Théorème 3.2 puisque le temps moyen d'absorption d'une marche uniformément initialisée est toujours bornée par  $1/\lambda$ , ce qui veut dire qu'on a concentration du temps de remplissage pour n'importe quel famille de sous-graph, tant que leur taille tend vers  $+\infty$ .

### Théorème 4.2

Soit  $G$  un graph transitif non-moyennable. Soit  $(G_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-graph fini de  $G$  tel que  $|G_n| \rightarrow \infty$ . On désigne la frontière extérieure de  $G_n$  comme puits. Soit  $T_{\text{full}}$  le temps de remplissage de l'IDLA sur  $G_n$ . Soit  $t_{\text{mix}}$  le temps de mélange pour la distance en séparation de l'ARW sur  $G_n$ . Alors il existe une constant  $K$  qui

dépend uniquement du graph  $G$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{\text{full}}}{\mathbb{E}[T_{\text{full}}]} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K}{\log(|G_n|/2)\varepsilon^2}.$$

De plus  $T_{\text{full}} = \Theta(|G_n| \log |G_n|)$ . De plus on a cutoff en séparation pour l'ARW sur  $(G_n)$ , plus précisément pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \Theta_\varepsilon(|G_n| \log |G_n|)$  et  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) - t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon) = \mathcal{O}_\varepsilon(|G_n| \sqrt{\log |G_n|})$ .

**Exemple d'illustration : Arbre régulier infini** Un exemple typique de groupe non moyennables sont les graphes de Cayley des groupes libres générés par  $d$  éléments (pour  $d \geq 3$ ). Ce sont des arbres  $d$ -réguliers. On peut par exemple s'intéresser à  $\mathcal{B}_r$  les boules de graphes de rayons  $r$  avec naturellement des puits aux bords. Par exemple dans le cas  $d = 3$  le résultat qu'on vient de montrer nous dit que la boule  $\mathcal{B}_r$  (voir Figure 4) de volume  $\Theta(2^r)$  se remplit en temps  $\Theta(r2^r)$ . De plus on a cutoff pour l'ARW sur ces boules.

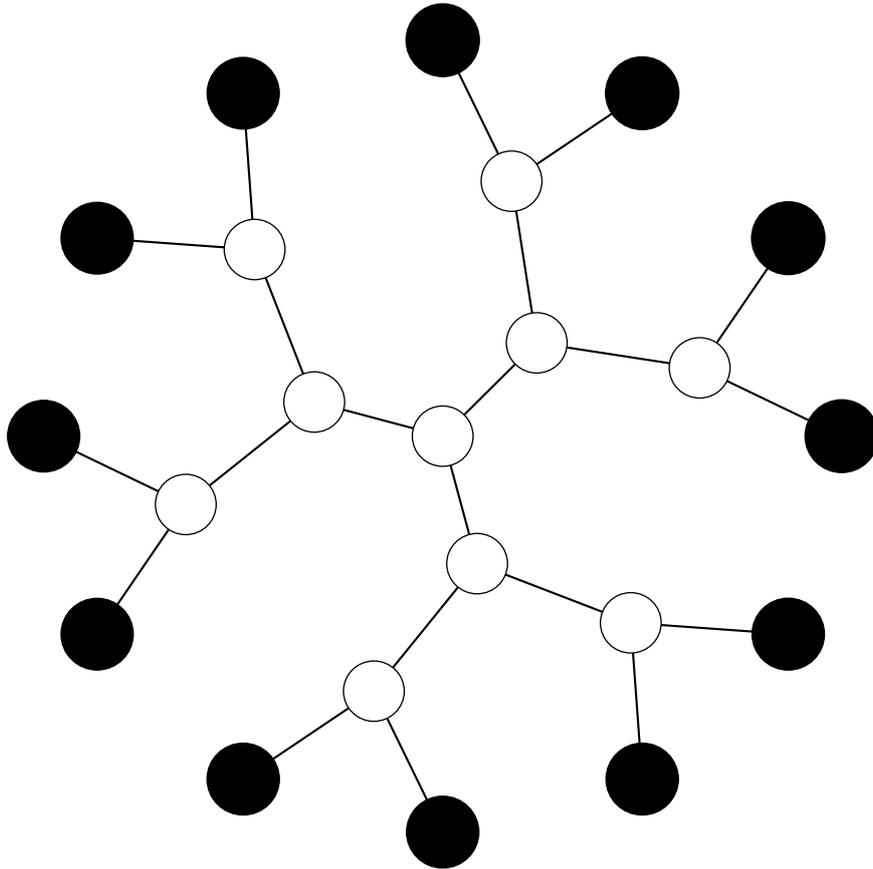


FIGURE 4 – Boule de rayon 2 de l'arbre 3-régulier avec son bord.

Une particule initialisée uniformément dans  $\mathcal{B}_r$  ne passera qu'un temps fini dans la boule. En effet dans ce cas on peut estimer ce temps car la distance à la racine d'une particule suit la même loi qu'une marche biaisée sur  $\mathbb{N}$  avec probabilité d'avancer  $2/3$ .

Si  $X$  est la marche biaisée sur  $\mathbb{N}$  avec probabilité de faire un saut  $+1$  de  $2/3$  alors  $X_t - k/3$  est une *sous-martingale*. En effet si  $X_t > 0$  alors  $\mathbb{E}[X_{t+1}|X_t] = X_t + 1/3$  et si

$X_t = 0$  alors  $\mathbb{E}[X_{t+1}|X_t] = X_t + 1$ , dans tous les cas

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - 1/3|X_t] = X_t + \mathbf{1}_{X_t=0}2/3 \geq X_t.$$

Si  $\tau_r$  est le premier temps que  $X_r > r$  alors  $X_{t \wedge \tau_r}$  est borné on peut appliquer le **théorème d'arrêt de Doob** a la *sous-martingale*  $X_t - t/3$

$$\mathbb{E}_i[\tau_r] \leq 3(\mathbb{E}_i[X_{\tau_r}] - \mathbb{E}_i[X_0]) = 3(r + 1 - i).$$

En d'autre terme le temps de sorti moyen d'une particule est majeure par 3 fois sa distance au bord de la boule. Si  $T_r$  est le temps de sorti d'une marche aleatoire sur  $\mathcal{B}_r$  et  $\pi$  est uniforme sur la boule  $\mathcal{B}_r$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_r] &\leq 3\pi(d(\cdot, \partial\mathcal{B}_r)) \\ &= 3 \frac{r + 1 + 3 \sum_{i=0}^{r-1} (r - i)2^i}{1 + 3 \sum_{i=0}^{r-1} 2^i} \\ &= 3 \frac{2^{r+1} + \mathcal{O}(r)}{2^r + \mathcal{O}(r)} = 6 + \mathcal{O}(r2^{-r}). \end{aligned}$$

La distance moyenne d'un élément de  $\mathcal{B}_r$  au bord est  $2 + \mathcal{O}(r2^{-r})$ , le temps de sorti moyen est donc uniformément bornée. On peut alors comprendre pourquoi le temps de remplissage est lent, a chaque étape la particule ajoutée visitera environ 2 autres sites avant d'être absorbée il y a donc aucune chance de remplir un site vide lointain, contrairement a des cas de bonne connectivité comme dans la grille  $\mathbb{Z}^2$ .

## 5 Conclusion

Nous avons étudié le modèle de marches aléatoires activées (ARW), nous avons prouvé la connexion entre le mélange de l'ARW et le remplissage de l'IDLA. En exploitant cette connexion nous avons prouvé que le temps de remplissage se concentrait autour de sa moyenne dans plusieurs cas différents. Si le graph est bien connecté alors chaque particule peut faire un long chemin avant d'être absorbé ce qui mène a un temps de remplissage rapide, dans le cas inverse les particules ne visite qu'un domaine fini avant d'être absorbée rapide ce qui donne un remplissage très lent, a peine aide par la possibilité de particules de se déplacer. Dans ces deux cas distinct nous avons tout de même prouvé concentration pour le temps de remplissage et donc cutoff de l'ARW.

La généralité des résultats de concentrations que nous avons démontré laisse penser qu'on a cutoff pour un très large ensembles de graph, notamment les boules de graphs pour des groupes à croissance polynomial. Ce serait l'extension naturelle du résultat du Théorème 4.1, d'autant que le contrôle des fonction de Green est identique au cas de la grille  $\mathbb{Z}^d$ . Cependant même dans le cas le plus simple de la boule de graph dans la grille  $\mathbb{Z}^d$  les temps de sorti semble difficile à étudier. En effet les points proches du coin de la boule de graph (boule  $L^1$ ) ont un temps de sorti très court et donc un  $p(z)$  d'ordre  $1/|V|$  mais la plus part de la masse se concentre au centre où les  $p(z)$  sont similaire a ceux de la boule Euclidienne.

## Références

- [Ald89] David Aldous. Hitting times for random walks on vertex-transitive graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 106(1) :179–191, 1989.
- [Ald16] David J. Aldous. Weak concentration for first passage percolation times on graphs and general increasing set-valued processes, 2016.
- [CRS14] M. Cabezas, L. T. Rolla, and V. Sidoravicius. Non-equilibrium phase transitions : Activated random walks at criticality. *Journal of Statistical Physics*, 155(6) :1112–1125, 2014.
- [LBG92] Gregory F. Lawler, Maury Bramson, and David Griffeath. Internal Diffusion Limited Aggregation. *The Annals of Probability*, 20(4) :2117 – 2140, 1992.
- [LL21] Lionel Levine and Feng Liang. Exact sampling and fast mixing of activated random walk. 10 2021.
- [TT20] Romain Tessera and Matthew Tointon. Sharp relations between volume growth, isoperimetry and resistance in vertex-transitive graphs, 2020.
- [Var85] N Th Varopoulos. Isoperimetric inequalities and markov chains. *Journal of functional analysis*, 63(2) :215–239, 1985.
- [Woe00] Wolfgang Woess. *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2000.